Méth. Mat. Phys. - Chapitre 4

Calcul variationnel

EPFL

- **Action :** fonctionnelle de la coordonnée généralisée q
  intégrale temporelle du lagrangien où $t \in [t_i, t_f]$

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} L\Big(q(t), \dot{q}(t), t\Big)\, dt \qquad (4.1)$$

- **Variation de l'action :**

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_i}^{t_f} \delta L\Big(q(t), \dot{q}(t)\Big)\, dt \qquad (4.3)$$

- **Variation du lagrangien :** (4.4)

$$\delta L\Big(q(t), \dot{q}(t)\Big) = L\Big(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta\dot{q}(t), t\Big) - L\Big(q(t), \dot{q}(t), t\Big)$$

- **Variations :** coordonnée et vitesse généralisées

$$\delta q(t) = \eta(t)\, d\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \delta\dot{q}(t) = \dot{\eta}(t)\, d\varepsilon \qquad (4.6)$$

- **Conditions au bord :** $q(t_i)$, $q(t_f)$, $\dot{q}(t_i)$, $\dot{q}(t_f)$ fixés

$$\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta\dot{q}(t_i) = \delta\dot{q}(t_f) = 0 \qquad (4.7)$$

$$\eta(t_i) = \eta(t_f) = 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{\eta}(t_i) = \dot{\eta}(t_f) = 0 \qquad (4.8)$$

- **Variation de l'action :** (4.5)

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \delta L\left(q\left(t\right), \dot{q}\left(t\right)\right) dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q\left(t\right)}\,\delta q\left(t\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}\left(t\right)}\,\delta \dot{q}\left(t\right)\right) dt$$

- **Variations :** coordonnée et vitesse généralisées

$$\delta q = \frac{\delta q}{d\varepsilon}\,d\varepsilon = \eta\,d\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \delta \dot{q} = \frac{\delta \dot{q}}{d\varepsilon}\,d\varepsilon = \dot{\eta}\,d\varepsilon \tag{4.6}$$

- **Variation de l'action :** composition de fonctions du paramètre ε

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\delta q}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\delta \dot{q}}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon\,dt = d\varepsilon \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\dot{\eta}\right) dt \tag{4.9}$$

- **Intégration par parties :**

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\dot{\eta}\,dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\eta\,\Bigg|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \eta\,dt \tag{4.10}$$

- **Identité :** condition au bord (4.8)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\eta\,\Bigg|_{t_i}^{t_f} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(t_f\right)\eta\left(t_f\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(t_i\right)\eta\left(t_i\right) = 0 \tag{4.11}$$

- **Intégration par parties :** (4.11) dans (4.10)

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \dot{\eta}\, dt = -\int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \eta\, dt \tag{4.12}$$

- **Variation de l'action :** (4.12) dans (4.9)

$$\delta S = d\varepsilon \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right) \eta\, dt \tag{4.13}$$

- **Minimum de l'action :** variation nulle pour tout $\delta q = \eta\, d\varepsilon$

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right) \delta q\, dt = 0 \tag{4.14}$$

- **Equation d'Euler-Lagrange :**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{4.15}$$

- **Hamiltonien :** opposé de la transformation de Legendre du lagrangien

$$H\left(q,p,t\right)=\frac{\partial L\left(q,\dot{q},t\right)}{\partial\dot{q}}\,\dot{q}-\,L\left(q,\dot{q},t\right)\tag{4.14}$$

- **Conjugaison :** lagrangien et hamiltonien

$$p\left(q,\dot{q},t\right)=\frac{\partial L\left(q,\dot{q},t\right)}{\partial\dot{q}}\qquad\text{et}\qquad\dot{q}\left(p,\dot{p},t\right)=\frac{\partial H\left(q,p,t\right)}{\partial p}\tag{4.17}$$

- **Dérivée temporelle de l'hamiltonien :**

$$\begin{aligned}\dot{H}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\,\ddot{q}-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\,\ddot{q}+\frac{\partial L}{\partial t}\right)\\&=\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}\right)\dot{q}-\frac{\partial L}{\partial t}=-\,\frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}\tag{4.18}$$

- **Symétrie :** lagrangien invariant par evolution temporelle t

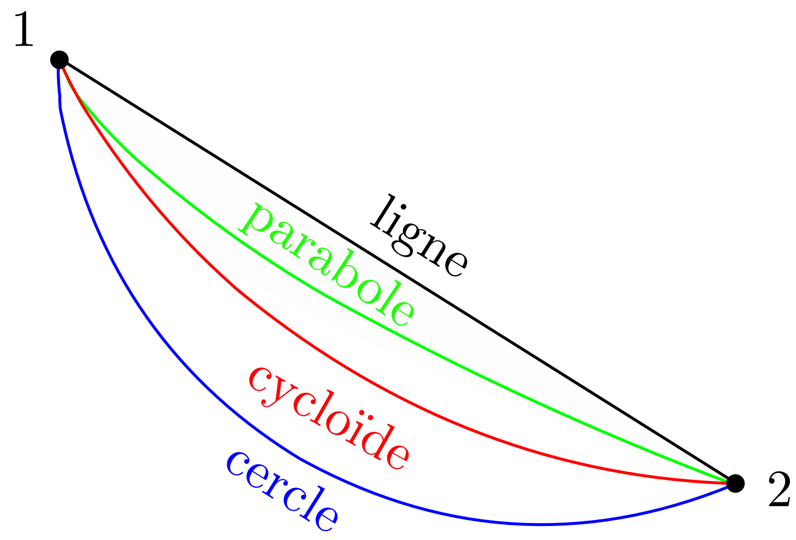
$$\frac{\partial L}{\partial t}=0\tag{4.19}$$

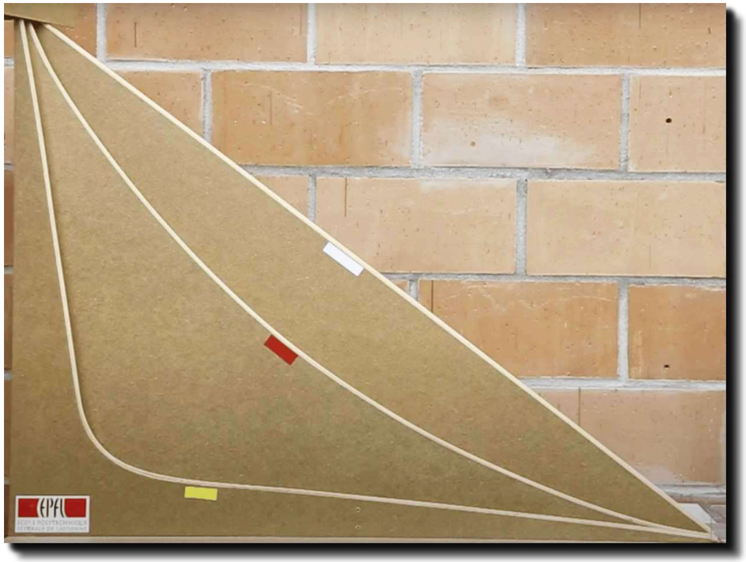
- **Hamitonien :** constante de Beltrami : conservation de l'énergie

$$H=\text{cste}\tag{4.20}$$

- **Brachistochrone :** courbe dans un plan vertical qui minimise le temps de parcours d'un point matériel entre des deux points notés 1 et 2.

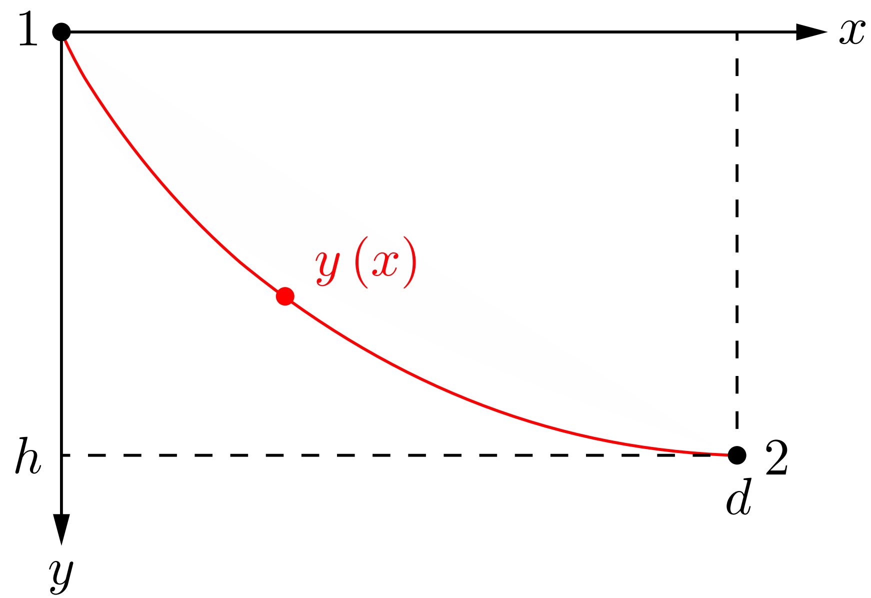
- **Etymologie :** (grec) 'brachistos' $=$ plus court; 'chronos' $=$ temps





- **Calcul variationnel :** minimisation de la fonctionnelle temps de parcours $T\left[y\right]$ où $y\left(x\right)$ dans le plan vertical Oxy.

$$T\left[y\right] = T\Big(y\left(x\right), y'\left(x\right)\Big) \qquad \text{où} \qquad y'\left(x\right) = \frac{dy\left(x\right)}{dx} \tag{4.31}$$



- **Vitesse scalaire :** dérivée temporelle de l'abscisse curviligne

$$v\left(y\left(x\right)\right)=\frac{ds\left(y\left(x\right)\right)}{dt} \tag{4.32}$$

- **Temps de parcours :** $y\left(0\right)=h$ et $y\left(d\right)=0$

$$T\left[y\right]=\int_{t_1}^{t_2}dt=\int_{y(0)}^{y(d)}\frac{ds\left(y\left(x\right)\right)}{v\left(y\left(x\right)\right)} \tag{4.33}$$

- **Abscisse curviligne :** infinitésimal

$$ds\left(y\left(x\right)\right)=\sqrt{dx^{2}+dy^{2}\left(x\right)}=\sqrt{1+y'^{2}\left(x\right)}\,dx \tag{4.34}$$

- **Conservation de l'énergie mécanique :** $y\left(0\right)=0$ et $v\left(y\left(0\right)\right)=0$

$$E=\frac{1}{2}\,m\,v^{2}\left(y\left(x\right)\right)+mgy\left(x\right)=0 \tag{4.35}$$

- **Vitesse scalaire :**

$$v\left(y\left(x\right)\right)=\sqrt{2\,g\,y\left(x\right)}>0 \tag{4.36}$$

- **Temps de parcours :**

$$T\left[y\right]=\int_{0}^{d}\sqrt{\frac{1+y'^{2}\left(x\right)}{2\,g\,y\left(x\right)}}\,dx \tag{4.37}$$

- **Action :**

$$S\left[y\right]=mc^{2}\,T\left[y\right]=mc^{2}\int_{0}^{d}\sqrt{\frac{1+y'^{2}\left(x\right)}{2\,g\,y\left(x\right)}}\,dx \tag{4.38}$$

- **Action :** intégrale temporelle du lagrangien : $dx = c\,dt$

$$S\left[y\right] = \int_0^d L\left(y\left(x\right), y'\left(x\right)\right) dt\left(x\right) = \int_0^d L\left(y\left(x\right), y'\left(x\right)\right) \frac{dx}{c} \qquad (4.41)$$

- **Lagrangien :**

$$L\left(y\left(x\right), y'\left(x\right)\right) = mc^3 \sqrt{\frac{1 + y'^2\left(x\right)}{2\,g\,y\left(x\right)}} \qquad (4.42)$$

- **Changement de variables :** mécanique analytique $\rightarrow$ brachistochrone

$$t \rightarrow x \qquad \text{et} \qquad q\left(t\right) \rightarrow y\left(x\right) \qquad \text{et} \qquad \dot{q}\left(t\right) \rightarrow y'\left(x\right) \qquad (4.43)$$

- **Variation de l'action :** variation nulle pour tout δy (4.14)

$$\delta S = \int_0^d \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right) \delta y\, \frac{dx}{c} = 0 \qquad (4.44)$$

- **Equation d'Euler-Lagrange :**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'\left(x\right)}\right) - \frac{\partial L}{\partial y\left(x\right)} = 0 \qquad (4.45)$$

- **Symmétrie du lagrangien :** L ne dépend pas explicitement de x

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{4.46}$$

- **Constante de Beltrami du mouvement :** où $K \neq H$

$$K = \frac{\partial L}{\partial y'(x)}\, y'(x) - L = \text{cste} \tag{4.47}$$

- **Dérivée partielle du lagrangien :**

$$\frac{\partial L}{\partial y'(x)} = \frac{m c^3\, y'(x)}{\sqrt{2\, g\, y(x)\left(1 + y'^2(x)\right)}} = \frac{y'(x)}{1 + y'^2(x)}\, L \tag{4.48}$$

- **Constante de Beltrami :**

$$K = \left(\frac{y'^2(x)}{1 + y'^2(x)} - 1\right) L = -\,\frac{L}{1 + y'^2(x)} = \text{cste} \tag{4.49}$$

- **Constante de Beltrami :**

$$K = -\frac{mc^3}{\sqrt{2\,g\,y\,(x)\,(1+y'^2\,(x))}} \equiv -\frac{mc^3}{\sqrt{4\,g\,R}} = \text{cste} \tag{4.50}$$

- **Constante géométrique :**

$$y\,(x)\left(1+y'^2\,(x)\right) = 2R = \text{cste} \tag{4.51}$$

- **Pente de la trajectoire :** positive orientée vers le bas

$$y'\,(x) = \frac{dy\,(x)}{dx} = \sqrt{\frac{2R - y\,(x)}{y\,(x)}} \tag{4.52}$$

- **Relation différentielle :**

$$dx = \sqrt{\frac{y}{2R-y}}\,dy \tag{4.53}$$

- **Changement de variable :**

$$y = R\,(1-\cos\theta) \qquad \text{ainsi} \qquad dy = R\sin\theta\,d\theta \tag{4.55}$$

- **Relation différentielle :** (4.55) dans (4.53) donne (4.56)

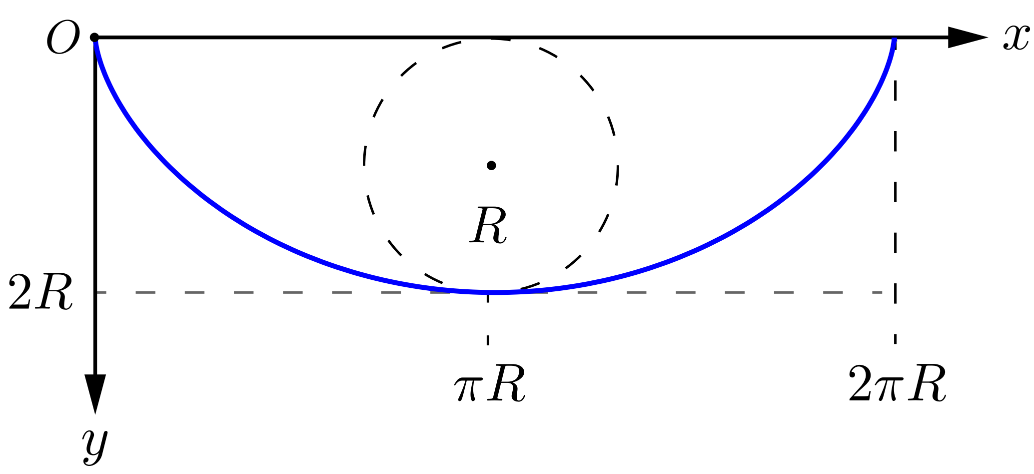
$$dx = R\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\,\sin\theta\,d\theta = \frac{R\,(1-\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\,\sin\theta\,d\theta = R\,(1-\cos\theta)\,d\theta$$

- **Coordonnée d'abscisse :**

$$x = \int_0^x dx' = R\int_0^\theta (1-\cos\theta')\,d\theta' = R\,(\theta-\sin\theta) \qquad (4.57)$$

- **Cycloïde inversée :** abscisse et ordonnée

$$x = R\,(\theta-\sin\theta) \qquad \text{et} \qquad y = R\,(1-\cos\theta) \qquad (4.55) \text{ et } (4.57)$$



- **Condition finale :** $\theta = \theta_2 :\quad x = d$ et $y = 0$

$$d = R\,(\theta_2 - \sin\theta_2) \qquad \text{et} \qquad h = R\,(1 - \cos\theta_2) \tag{4.58}$$

- **Optimisation de l'angle final :** rapport hauteur sur rayon

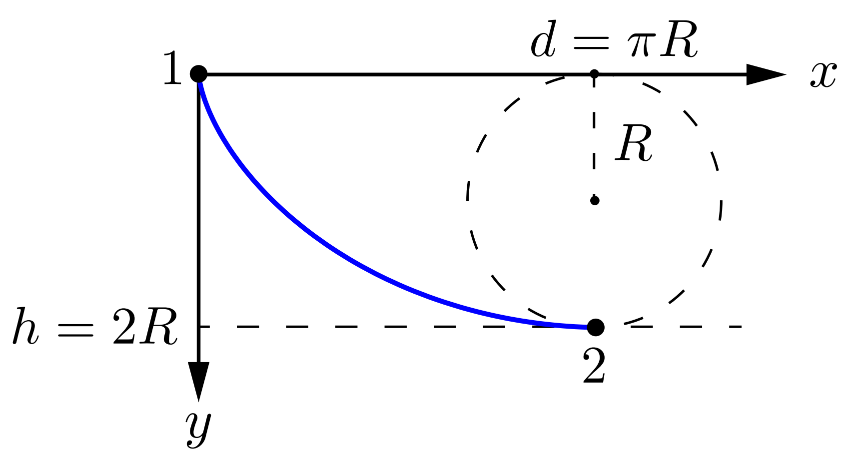
$$\left.\frac{d\left(\frac{h}{R}\,(\theta_2')\right)}{d\theta_2'}\right|_{\theta_2} = \left.\frac{d\,(1 - \cos\theta_2')}{d\theta_2'}\right|_{\theta_2} = \sin\theta_2 = 0 \tag{4.59}$$

- **Demi-période :** cycloïde (angle final)

$$\theta_2 = \pi \tag{4.60}$$

- **Rayon et distance :** (4.60) dans (4.58)

$$h = 2R \qquad \text{et} \qquad d = \pi R \tag{4.61}$$



- **Temps de parcours minimal :** (4.37), (4.51) et (4.54)

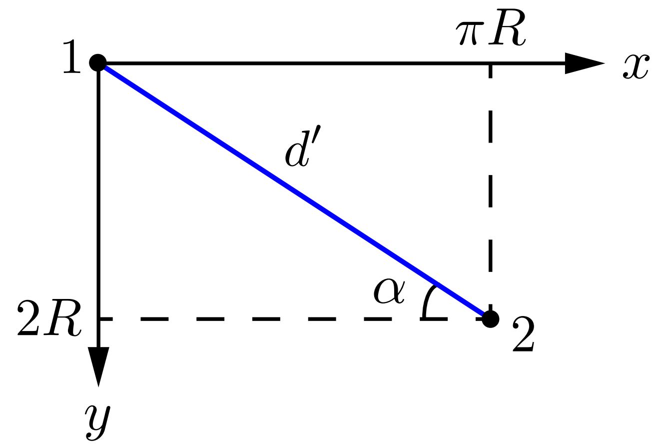
$$T\left[y\right] = \int_0^d \sqrt{\frac{1 + y'^2\left(x\right)}{2\,g\,y\left(x\right)}}\;dx = \int_0^d \sqrt{\frac{2R}{2\,g\,y^2\left(x\right)}}\;dx$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2R}{2\,g\,R^2\left(1 - \cos\theta\right)^2}}\;R\left(1 - \cos\theta\right)d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^\pi d\theta = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

- **Temps de parcours minimal :** cycloïde

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \tag{4.62}$$



- **Distance parcourue en ligne droite :** cinématique (plan incliné)

$$d' = \frac{1}{2}\, g\, \sin\alpha\, T'^2 = \frac{1}{2}\, g\, \frac{2R}{d'}\, T'^2 \tag{4.63}$$

- **Distance parcourue en ligne :** géométrie (plan incliné)

$$d' = \sqrt{(\pi R)^2 + (2R)^2} = \pi R \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \tag{4.64}$$

- **Temps de parcours en ligne :** comparaison cycloïde

$$T' = \frac{d'}{\sqrt{R\, g}} = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}\; T = 1.185\; T \tag{4.65}$$